数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 117-133

非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体の無限次元幾何を利用した研究

小池直之 (Naoyuki Koike)
東京理科大 (Tokyo University of Science)

I. イントロダクション & 結果

本稿では、ヒルベルト空間はすべて可分なものとする。リーマンヒルベルト多様体の基本的な研究は 1960 年代になされた。([L],[P],[Sm1],[Sm2] を参照のこと)。その後、1980 年代後半に C.L. Terng ([Te2]) によってヒルベルト空間内で固有フレッドホルム部分多様体という概念が次の 2 条件 (F),(P) を満たす余次元有限な部分多様体として定義された。

(F) その法指数写像の各点での微分はフレッドホルム作用素になる。

(P) その法指数写像の勝手な半径の法ボールバンドルへの制限は固有写像になる。

条件 (F) は各法方向の形作用素がコンパクト作用素になることを保証し、条件 (P) は外の点からの 2 乗距離関数がパレ・スメール条件を満たすことを保証する。さらにそのクラスのサブクラスとして (無限次元) 等径部分多様体という概念が定義された。一方、コンパクト半単純リー群 G に対し、parallel transport 写像と呼ばれる、$[0,1]$ 上の自明な G バンドル $[0,1]\times G$ の H^0-接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$: G のリー代数) から G へのリーマンサブマージョンが定義された。このサブマージョンを ϕ と表す。ここで、G には両側不変なリーマン計量を与え、$H^0([0,1],\mathfrak{g})$ には、そのリーマン計量を誘導する $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積に関する L^2 内積を与える。C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh1]) はコンパクト型対称空間内の固有にはめ込まれた部分多様体から次のように固有フレッドホルム部分多様体を構成できることを示した。$N=G/K$ をコンパクト型対称空間、π を G から G/K への自然な射影、$\phi: H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ を parallel transport 写像とする。このとき、N 内の固有にはめ込まれた部分多様体 M に対し、$(\pi\circ\phi)^{-1}(M)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の固有フレッドホルム部分多様体になる。ここで、M が固有にはめ込まれていなくても、$(\pi\circ\phi)^{-1}(M)$ はフレッドホルム部分多様体 (条件 (F) のみを満たす部分多様体) になることを注意しておく。一方、C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh1]) は一般の対称空間内で等焦部分多様体という概念を定義した。これはユークリッド空間内の等径部分多様体および球面，双曲空間内の等径超曲面を一般化した概念である。コンパクト型対称空間 $N=G/K$ 内の法ホロノミー群が自明で法バンドルがアーベル的なコンパクト部分多様体 M が等焦部分多様体であることと $(\pi\circ\phi)^{-1}(M)$ の各連結成分が等径部分多様体であることが同値であることが示される ([TeTh1])。このように、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体の研究は、ヒルベルト空間内の等径部分多様体の研究に還元できる。コンパクト型対称空間は有限次元だがホロノミーがあり、それゆえ絶対平行性がない

のに比べ、ヒルベルト空間は無限次元だがホロノミーがなく絶対平行性があるという面で、コンパクト型対称空間内の問題をヒルベルト空間内の問題に還元して研究するということは、問題にもよるが有益である。E. Heintze と X. Liu([HL1]) は、ヒルベルト空間内の等径部分多様体が 2 つの等径部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、その部分多様体に付随する Coxeter 群が分解可能であることが同値であることを示した。その後、H. Ewert([E1]) は、単連結コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体が 2 つの等焦部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、その部分多様体に付随する Coxeter 群が分解可能であることが同値であることを示した。その証明は、parallel transport 写像を通じて、Heintze-Liu の分解定理を用いてなされる。

[TeTh1] のオープンプロブラムの 1 つに次の問題がある。

Terng-Thorbergsson の問題 非コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体に対し、類似した理論を展開することができるか？

一般に、完備な負曲率多様体内の部分多様体の形作用素の 0 に近い各固有値に対しては、それに対応すべきフォーカル点が無限の彼方へ消えてしまう、つまり、対応すべきフォーカル半径が実数の範囲では実在しない。このような理由から、非コンパクト型対称空間内の部分多様体に対しては、等焦性は主曲率ではなくフォーカル半径を用いて定義されるので、性質として弱すぎる。そこで、筆者はより一般に複素フォーカル半径という概念を導入し、その概念を用いて複素等焦部分多様体およびそのサブクラスとしてプロパー複素等焦部分多様体というクラスを導入した ([K1])。そして、等焦部分多様体でなく複素等焦部分多様体に対して上述の問題に取り組んだ。複素フォーカル半径はそれに対応すべきフォーカル点が実在しないので仮想的な概念であった。その後、[K2] において複素フォーカル半径の幾何的実質を掴むために、非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備かつ実解析的な部分多様体 M の外在的複素化 $M^{\mathbf{c}}$ をアンチケーラー対称空間とよばれる空間 $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内の複素部分多様体として定義し、M の複素フォーカル半径を $M^{\mathbf{c}}$ のフォーカル点として捕らえることができた ([K2])。ここで、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ は G/K とそのコンパクト双対 G^*/K の双方を含み、その双方の世界をながめることのできる包括的空間であることを注意しておきたい。一方、$G^{\mathbf{c}}$ に対し、parallel transport 写像 $\phi^{\mathbf{c}}$ を、自明な $G^{\mathbf{c}}$-バンドル $[0,1]\times G^{\mathbf{c}}$ のある種の接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$(これは無限次元アンチケーラー空間になる) から $G^{\mathbf{c}}$ へのあるアンチケーラーサブマージョンとして定義し、また、無限次元アンチケーラー空間内でアンチケーラー等径部分多様体およびプロパーアンチケーラー等径部分多様体という概念を導入した。$\pi^{\mathbf{c}}:G^{\mathbf{c}}\to G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ を自然な射影として、次の事実が成り立つ。

定理 1([K2]) M を非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の法ホロノミー群が自明で法バンドルがアーベル的な完備かつ実解析的部分多様体とする。このとき、M が複素等焦であることと $(\pi^{\mathbf{c}}\circ\phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ の各連結成分がアンチケーラー等径的であることは同値である。

このように、非コンパクト型対称空間内の完備かつ実解析的な複素等焦部分多様体の研究は、無限次元アンチケーラー等径部分多様体の研究に還元される。ところで、プロパーアンチケーラー等径部分多様体 M について、次の事実が示される:

- (M, x) (x : M の任意の点) のフォーカル点の全体は、無限に多くの複素超平面の和になる。

この事実の下に、プロパーアンチケーラー等径部分多様体に付随して複素 reflection 群を、その任意の点における法空間内のフォーカル集合を構成する複素超平面らに関する位数 2 の複素 reflection らから生成される Coxeter 群として定義し、それをその部分多様体に付随する複素 Coxeter 群と呼んだ ([K4])。この群は離散群であることが示される。

前述の Heintze-Liu の分解定理に類似して、次の事実が示される。

定理 2([K4]) 無限次元アンチケーラー空間内のプロパーアンチケーラー等径部分多様体が 2 つのプロパーアンチケーラー等径部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、その部分多様体に付随する複素 Coxeter 群が分解可能であることは、同値である。

また、プロパー複素等焦部分多様体に対しても、それに付随する複素 Coxeter 群が定義され、定理 2 を用いて、前述の Ewert の分解定理に類似した次の事実が示される。

定理 3([K4]) 非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備かつ実解析的なプロパー複素等焦部分多様体が 2 つのプロパー複素等焦部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、その部分多様体に付随する複素 Coxeter 群が分解可能であることは同値である。

複素等焦部分多様体のクラスにおいて、プロパー複素等焦部分多様体がどの程度占めるのかを調べることは重要である。これに関して、次の結果が得られる。

定理 4([K3]) 非コンパクト型対称空間 G/K 上の Hermann 型作用 (つまり、G の対称部分群の作用) の主軌道は、curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体である。

既約コンパクト型対称空間内の余次元 2 以上の完備かつ連結な等焦部分多様体はすべて Hermann 作用の主軌道として捕らえられることが示される。定理 4 の事実とこの事実からプロパー複素等焦部分多様体のクラスは複素等焦部分多様体のクラスをかなりの程度占めていると推測される。

curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体に付随する複素 Coxeter 群に関して、次の事実が示される。

定理 5([K6]) M を非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備, 実解析的かつ curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体とし、$\triangle$ を $g_*^{-1}T^{\perp}_{gK}M$ (gK : M の任意の点) を含む極大アーベル部分空間に関するルート

系とし、$\overline{\triangle} := \{\alpha|_{g_*^{-1}T_{gK}^{\perp}M} \,|\, \alpha \in \triangle \text{ s.t. } \alpha|_{g_*^{-1}T_{gK}^{\perp}M} \neq 0\}$ とする。このとき、M に付随する複素 Coxeter 群は、$\overline{\triangle} \times \mathbf{Z}^r$ $(r := \operatorname{codim} M)$ をアフィンルート系としてもつアフィン Weyl 群に同型である。

定理 3,5 を用いて、次の事実が示される。

系 M を非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備，実解析的かつ curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体とし、$\overline{\triangle}$ を定理 5 におけるようなルート系とする。このとき、M が 2 つの curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、$\overline{\triangle}$ をルート系としてもつ Weyl 群が分解可能であることは同値である。

また、curvature adapted な複素等焦超曲面に対し、次のカルタン型等式が示される：

定理 6([K5]) M を非コンパクト型対称空間 G/K (G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備，実解析的かつ curvature adapted な複素等焦超曲面とし (一般性を失うことなく $eK \in M$ (e : G の単位元) としてよい)、$\mathfrak{a}$ を $T_{eK}^{\perp}M$ を含む $\mathfrak{p} = T_{eK}(G/K)$ の極大アーベル部分空間、$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \triangle_+} \mathfrak{p}_\alpha$ を $\mathfrak{a}$ に関するルート空間分解とする。次の (i) ～ (iii) のいずれかが成り立っているとする：

(i) $\operatorname{rank} G/K = 1$

(ii) M は等質である。

(iii) 各 $\alpha \in \triangle_+$ に対し、$\mathfrak{p}_\alpha \cap \operatorname{Ker}(A \pm \alpha(v)\mathrm{id}) = \{0\}$ (v : M の eK における単位法ベクトル) となる。

このとき、M の各複素フォーカル半径 r_0 に対し、次の等式が成り立つ。

$$\sum_{(\lambda,\alpha) \in S_{r_0}} \frac{\alpha(v)^2 - \frac{\lambda\alpha(v)}{\tanh(r_0\alpha(v))}}{\lambda - \frac{\alpha(v)}{\tanh(r_0\alpha(v))}} \times m_{\lambda,\alpha} = 0$$

ただし、$S_{r_0} := \{(\lambda,\alpha) \in \operatorname{Spec}A \times \triangle_+ \,|\, \mathfrak{p}_\alpha \cap \operatorname{Ker}(A - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\},\ \lambda \neq \frac{\alpha(v)}{\tanh(r_0\alpha(v))}\}$, $m_{\lambda,\alpha} := \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda\mathrm{id}) \cap \mathfrak{p}_\alpha)$ とする。

この等式を用いてその超曲面の主曲率の個数に関して次の結果を得ることができる。

定理 7([K5]) M を非コンパクト型対称空間 G/K (G は忠実な実表現をもつものとする) 内の定理 6 におけるような超曲面とする。このとき、M の主曲率の個数を g として、次の不等式が成り立つ。

$$g \leq \begin{cases} \sharp(\triangle_+ \setminus (\triangle_+^1 \cup \triangle_v)) \times 2 + \sharp(\triangle_+^1 \cup \triangle_v) + 1 & (\operatorname{rank}(G/K) \geq 2) \\ \sharp(\triangle_+ \setminus (\triangle_+^1 \cup \triangle_v)) \times 2 + \sharp(\triangle_+^1 \cup \triangle_v) & (\operatorname{rank}(G/K) = 1) \end{cases}$$

ただし、$\triangle_+^1 := \{\alpha \in \triangle_+ \,|\, \dim\mathfrak{p}_\alpha = 1\}$, $\triangle_v := \{\alpha \in \triangle_+ \,|\, \alpha(v) = 0\}$ とし、$\sharp(\cdot)$ は $(\cdot)$ の要素の個数を表す。

II. 基本概念

1. 複素等焦部分多様体

M を対称空間 G/K 内のはめ込まれた部分多様体とする。M が curvature adapted であるとは、その各法ベクトル v に対し、$R(\cdot,v)v$ が M の接空間を保ち、形作用素 A_v と可換であることを意味する。ただし、R は G/K の曲率テンソルを表す。この概念は 1993 年に J. Berndt と L. Vanhecke によって定義された。実空間形内の任意の部分多様体、複素空間形内のケーラー部分多様体および generic(特に、ラグランジュ) 部分多様体、Hermann 作用の主軌道らは、curvature adapted である。次に、等焦部分多様体の定義を述べることにする。M が 等焦部分多様体 であるとは、次の 2 条件が成り立つことである。

(E-i) M の法ホロノミー群が自明で、かつ、法バンドルがアーベル的である。
(E-ii) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\gamma_{\tilde{v}_x}$ $(x\in M)$ に沿うフォーカル半径らが x によらず (つまり、M 上で) 一定である。ただし、$\gamma_{\tilde{v}_x}$ は $\dot{\gamma}_{\tilde{v}_x}(0)=\tilde{v}_x$ となる法測地線を表す。

この概念は 1995 年に C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh1]) によって定義された。次に、複素フォーカル半径の定義を述べることにする。v を M の点 $x=gK$ における法ベクトルとし、γ_v を $\gamma_v'(0)=v$ を満たす法測地線とする。γ_v に沿うヤコビ場 Y で、$Y(0)=X\,(\in T_xM)$, $Y'(0)=-A_vX$ を満たすものは

$$Y(s)=(P_{\gamma_v|_{[0,s]}}\circ(D^{co}_{sv}-sD^{si}_{sv}\circ A_v))(X)$$

によって与えられる。ここに、$Y'(0)=\widetilde{\nabla}_vY$, ($\widetilde{\nabla}$: G/K のリーマン接続) であり、$P_{\gamma_v|_{[0,s]}}$ は $\gamma_v|_{[0,s]}$ に沿う平行移動を表し、また、D^{co}_{sv}, D^{si}_{sv} は各々次式によって定義される T_xM の線形変換である。

$$D^{co}_{sv}=g_*\circ\cos(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v))\circ g_*^{-1}\qquad D^{si}_{sv}=g_*\circ\frac{\sin(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v))}{\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v)}\circ g_*^{-1}$$
$$(\mathrm{ad}\,:\,\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}\,G\text{ の随伴表現})$$

このように、γ_v に沿うフォーカル半径は $\mathrm{Ker}(D^{co}_{sv}-sD^{si}_{sv}\circ A_v)\neq\{0\}$ となる実数 s として捕らえられる。G/K が非コンパクト型の場合、より一般に $\mathrm{Ker}(D^{co}_{zv}-zD^{si}_{zv}\circ A^{\mathbf{c}}_v)\neq\{0\}$ となる複素数 z を幾何学的量として取り扱うべきであると筆者 ([K1]) は考え、その量を 複素フォーカル半径 と名づけた。ここに、D^{co}_{zv}, D^{si}_{zv} および $A^{\mathbf{c}}_v$ は、各々、$(g_*\circ\cos(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(zg_*^{-1}v))\circ g_*^{-1})|_{T_xM}$ $(:T_xM\to(T_xG/K)^{\mathbf{c}})$, $(g_*\circ\frac{\sin(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(zg_*^{-1}v))}{\sqrt{-1}\mathrm{ad}(zg_*^{-1}v)}\circ g_*^{-1})|_{T_xM}$ $(:T_xM\to(T_xG/K)^{\mathbf{c}})$ および A_v の複素化を表す。

(注) G/K がコンパクト型のとき、同様に複素フォーカル半径を定義しても結局すべて実数となってしまい、フォーカル半径以外の新しいものは出てこない。

$(\mathfrak{g},\sigma)$ を非コンパクト型対称空間 G/K の直交対称リー代数とし、$\mathfrak{p}:=\mathrm{Ker}(\sigma+\mathrm{id})$, $\mathfrak{f}:=\mathrm{Ker}(\sigma-\mathrm{id})$ とする。$\mathfrak{p}$ は、$T_{eK}G/K$ と同一視される。また、$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}+\sum\limits_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{p}_\alpha$

を、v を含むある極大アーベル部分空間 $\mathfrak{a}$ に関するルート空間分解とする。このとき、次の事実が成り立つ。

命題 1.1([K1]) $A_v X = \lambda X$ ($v \in T^{\perp}_{gK}M$) かつ $g_*^{-1}X \in \mathfrak{p}_\alpha$ となる $X(\neq 0) \in T_{gK}M$ が存在するとする。このとき、次の (i) ~ (iii) が成り立つ。

(i) $|\lambda| > |\alpha(g_*^{-1}v)| = 0$ ならば、$\frac{1}{\lambda}$ は γ_v に沿うフォーカル半径である。$g_*^{-1}X \in \mathfrak{a}$ の場合にも、同様のことが言える。

(ii) $|\lambda| > |\alpha(g_*^{-1}v)| > 0$ ならば、$\frac{1}{\alpha(g_*^{-1}v)}(\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(g_*^{-1}v)}{\lambda} + j\pi\sqrt{-1})$ ($j \in \mathbf{Z}$) は γ_v に沿う複素フォーカル半径である。

(iii) $|\lambda| < |\alpha(g_*^{-1}v)|$ ならば、$\frac{1}{\alpha(g_*^{-1}v)}(\mathrm{arctanh}\frac{\lambda}{\alpha(g_*^{-1}v)} + (j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1})$ ($j \in \mathbf{Z}$) は γ_v に沿う複素フォーカル半径である。

複素フォーカル半径を用いて次の概念を導入した。非コンパクト型対称空間内の部分多様体が複素等焦部分多様体であるとは、前述の条件 (E-i) と次の条件 (C) が成り立つことである：

(C) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、法測地線 $\gamma_{\tilde{v}_x}(x \in M)$ に沿う複素フォーカル半径らが x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

2. アンチケーラー対称空間

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を (有限次元) 擬リーマン多様体とし、J を M の概複素構造とする。J が次の 2 条件を満たすとき、$(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ をアンチケーラー多様体と呼ぶ。

(i) $\langle JX, JY\rangle = -\langle X, Y\rangle$ ($\forall X, Y \in TM$)

(ii) $\nabla J = 0$ (∇ : $\langle\ ,\ \rangle$ のレビ・チビタ接続)

このとき、J は積分可能、つまり、複素構造になることを注意しておく。f をアンチケーラー多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ からアンチケーラー多様体 $(N, \langle\ ,\ \rangle, \widetilde{J})$ への正則等長はめ込みとする。このとき、f をアンチケーラーはめ込みと呼び、$(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を $(N, \langle\ ,\ \rangle, \widetilde{J})$ 内のアンチケーラー部分多様体と呼ぶ。

G/K を非コンパクト型対称空間 (ただし、G は連結で忠実な実表現をもつ、それゆえ、複素化 $G^{\mathbf{c}}$ をもつものとする), $\mathfrak{g}$ を G のリー代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解, $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}, \mathfrak{f}^{\mathbf{c}}, \mathfrak{p}^{\mathbf{c}}, K^{\mathbf{c}}$ を各々、$\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \mathfrak{p}, K$ の複素化とする。G/K のリーマン計量を誘導する $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積から決まる $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$ の対称複素双線形形式の実部を考える。この実部を $\langle\ ,\ \rangle$ と表す。これは $\mathrm{Ad}(G^{\mathbf{c}})$ 不変な非退化対称双線形形式で $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $G^{\mathbf{c}}$-不変な擬リーマン計量を定める。この計量も $\langle\ ,\ \rangle$ で表すことにする。接空間 $T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ は $\mathfrak{p}^{\mathbf{c}}(= \mathfrak{p} + \sqrt{-1}\mathfrak{p})$ と同一視され、$\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ は正定値、$\langle\ ,\ \rangle|_{\sqrt{-1}\mathfrak{p}\times\sqrt{-1}\mathfrak{p}}$ は負定値、$\mathfrak{p}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は、$\langle\ ,\ \rangle$ に関して直交している。J を、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $J_{eK^{\mathbf{c}}}(X + \sqrt{-1}Y) = -Y + \sqrt{-1}X$ ($X, Y \in \mathfrak{p}$) を満たす $G^{\mathbf{c}}$-不変な概複素構造とする。$(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ は、アンチケーラー多様体かつ擬リーマン対称空間となる。$\exp_{eK^{\mathbf{c}}}\mathfrak{p}$ と $\exp_{eK^{\mathbf{c}}}\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は共に全測地的であり、各々、G/K, そのコンパクト双対 G^*/K と同一視される。このように $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ は G/K と G^*/K の双方を $eK^{\mathbf{c}}$ において互いに直交する全測地的

部分多様体として含む包括的空間になっている。

3. 非コンパクト型対称空間内の部分多様体の外在的複素化

この節において、[K2] で定義した非コンパクト型対称空間内の完備かつ実解析的な部分多様体の外在的複素化について説明する。最初に、完備かつ実解析的なリーマン多様体の複素化について説明する。M を完備かつ実解析的なリーマン多様体とする。M の接バンドル TM の 0 切断の適当な近傍 U 上で次の条件を満たす複素構造 J_A が一意に決まる ([St],[Sz1~4]) :

M 上の任意の測地線 $\gamma:\mathbf{R}\to M$ に対し、$\gamma_*:T\mathbf{R}=\mathbf{C}\to TM$ の $\gamma_*^{-1}(U)$ への制限が (U,J_A) における正則曲線になる。

U はできるだけ大きくとっておく。(U,J_A) を M の複素化とよび、$M^{\mathbf{c}}$ と表す。M の断面曲率がすべて非負のとき、$U=TM$ となり、それらがすべて $c(<0)$ 以上のとき、$U\supset\{X\in TM\,|\,\|X\|<\frac{\pi}{2\sqrt{-c}}\}$ となる。

M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の f によって等長的にはめ込まれた完備かつ実解析的なリーマン部分多様体とする。ここで、G は連結で忠実な実表現をもつ、それゆえ、G の複素化 $G^{\mathbf{c}}$ をもつものとする。f の複素化 $f^{\mathbf{c}}:M^{\mathbf{c}}\hookrightarrow G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ を次のように定義する。まず、実解析的な曲線 $\alpha:\mathbf{R}\to G/K$ の複素化を定義することにする。実解析的な曲線 $W:\mathbf{R}\to T_{eK}(G/K)$ を $\exp_{eK}(W(t))=\alpha(t)$ $(t\in\mathbf{R})$ によって定義する。ここで、$\exp_{eK}$ は G/K の eK における exp 写像を表す。$W^{\mathbf{c}}:D\to(T_{eK}(G/K))^{\mathbf{c}}(=T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}))$ (D : $\mathbf{R}$ の $\mathbf{C}$ における近傍) を W の正則拡張として α の複素化 $\alpha^{\mathbf{c}}$ を $\alpha^{\mathbf{c}}(z)=\exp_{eK^{\mathbf{c}}}(W^{\mathbf{c}}(z))(z\in D)$ によって定義する。ここで、$\exp_{eK^{\mathbf{c}}}$ は $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $eK^{\mathbf{c}}$ における exp 写像を表す。この曲線の複素化を $\exp_{eK},\exp_{eK^{\mathbf{c}}}$ の代わりに $\exp_{gK},\exp_{gK^{\mathbf{c}}}$ (gK : M の任意の点) を用いて同様に定義したとしても同じものになることを注意しておく。この曲線の複素化を用いて f の複素化 $f^{\mathbf{c}}$ を $f^{\mathbf{c}}(X)=(f\circ\gamma_X)^{\mathbf{c}}(\sqrt{-1})$ $(X\in M^{\mathbf{c}})$ によって定義する。ただし、γ_X は、$\dot\gamma_X(0)=X$ となる M における測地線を表し、$M^{\mathbf{c}}$ は必要ならば $M^{\mathbf{c}}$ の各 X に対し、$(f\circ\gamma_X)^{\mathbf{c}}(\sqrt{-1})$ が定義できるように 0-切断のより小さい近傍に縮めておく。さらに必要ならば $M^{\mathbf{c}}$ を 0-切断のより小さい近傍に縮めることにより $f^{\mathbf{c}}$ は正則はめ込みであるとしてよいことがわかる。$M^{\mathbf{c}}$ には、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の擬リーマン計量から $f^{\mathbf{c}}$ によって誘導される計量を与える。このとき、$M^{\mathbf{c}}$ は $f^{\mathbf{c}}$ によってはめ込まれた $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内のアンチケーラー部分多様体になる。この部分多様体を元の部分多様体 M の外在的複素化と呼ぶ。$M^{\mathbf{c}}$ は完備であるとは限らないことを注意しておく。外在的複素化について、次の事実が成り立つ。

定理 3.1([K7]). $M:=\exp_{eK}\{X\in T_{eK}(G/K)\,|\,F_i(X)=0\,(i=1,\cdots,r)\}$ とする。ただし、$\{F_i\,|\,i=1,\cdots,r\}$ は $T_{eK}(G/K)$ 上の実解析的関数の列で M に沿って $\mathrm{grad}\,F_1,\cdots,\mathrm{grad}\,F_r$ が 1 次独立であるようなものとする。f を M から G/K への包含写像とするとき、その外在的複素化の像 $f^{\mathbf{c}}(M^{\mathbf{c}})$ は $\exp_{eK^{\mathbf{c}}}\{X\in T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})\,|\,F_i^h(X)$

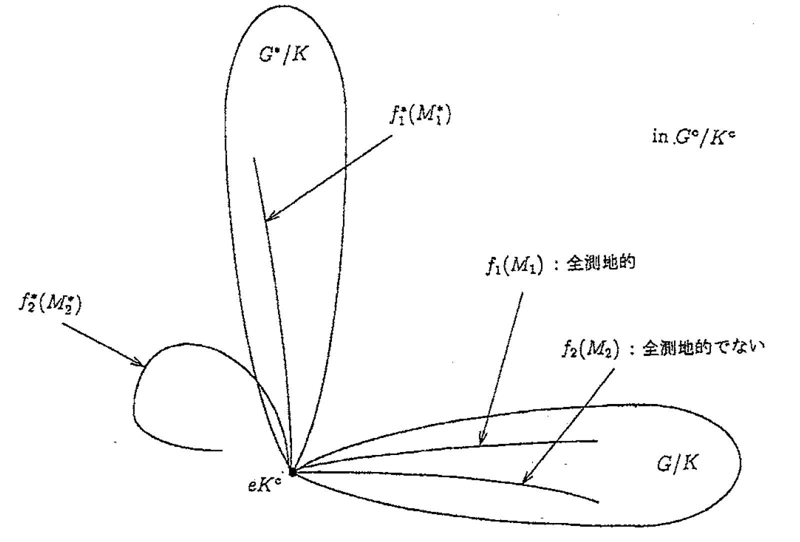
$=0\,(i=1,\cdots,r)\}$ (F_i^h : F_i の最大の正則拡張) に含まれる。ここで、$T_{eK^c}(G^c/K^c)$ は $(T_{eK}(G/K))^c$ と同一視される。

例　M が n 次元非コンパクト型対称空間 G/K 内の点 eK を中心とする半径 r の測地的球面のとき、その外在的複素化は $T_{eK^c}(G^c/K^c)$ 内の半径 r の複素球面 $z_1^2+\cdots+z_n^2=r^2$ の $\exp_{eK^c}$ による像になる。ただし、$(z_1,\cdots,z_n)$ は $T_{eK^c}(G^c/K^c)$ の擬ユークリッド座標系に付随する複素座標系を表す。

定理 3.1 の主張における部分多様体 M に包含写像 f によって誘導されるリーマン計量 (これを g と表す) 以外の完備かつ実解析的なリーマン計量 g' を与えたとき、その完備かつ実解析的リーマン多様体の複素化を $M^{c'}$ として $f^c : M^c \hookrightarrow G^c/K^c$ と同様に f の拡張である正則はめ込み $f^{c'} : M^{c'} \hookrightarrow G^c/K^c$ が定義される。このとき、$X \in M^c \cap M^{c'}\,(\subset TM)$ に対し、$f^c(X)=(f\circ\gamma_X)^c(\sqrt{-1})$ と $f^{c'}(X)=(f\circ\overline{\gamma}_X)^c(\sqrt{-1})$ は一般には異なるので f^c と $f^{c'}$ は $M^c\cap M^{c'}$ 上で異なる。ここで、$\gamma_X, \overline{\gamma}_X$ は各々 X を初速度としてもつ (M,g), (M,g') における測地線を表す。しかし、$f^{c'}(M^{c'})$ も $\exp_{eK^c}\{X\in T_{eK^c}(G^c/K^c)\,|\,F_i^h(X)=0\,(i=1,\cdots,r)\}$ に含まれることが示される。

M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の f によってはめ込まれた完備かつ実解析的なリーマン部分多様体とし、$f^c : M^c \hookrightarrow G^c/K^c$ をその外在的複素化とする。各 $gK \in M$ に対し、$M^*_{gK} := M^c \cap T_{gK}M$, $f^*_{gK} := f^c|_{M^*_{gK}}$ とおく。このとき、部分多様体 $f^*_{gK} : M^*_{gK} \hookrightarrow G^c/K^c$ を M の gK における双対部分多様体 とよぶ。これは元の部分多様体 M のある種の双対物を G^c/K^c 内で捕らえたものと解釈される。像 $f^*_{gK}(M^*_{gK})$ は、$\exp_{gK^c}(J(T_{gK}(G/K)))$ (これはコンパクト双対 G^*/K と同一視される G^c/K^c 内の全測地的部分多様体である) に含まれているとは限らない。ここで、J は G^c/K^c の複素構造を表す。つまり、G^c/K^c 内で捕らえたこの M の双対物は一般には $G^*/K(=\exp_{gK^c}(\sqrt{-1}\mathfrak{p}))$ の中で捕らえることができないわけである。しかし、次の事実が成り立つ。

定理 3.2. M が全測地的であるならば、$f^*_{gK}(M^*_{gK})$ は $\exp_{gK^c}(J(T_{gK}(G/K)))(=G^*/K)$ に含まれ、かつ、その中で全測地的になる。



4. 無限次元アンチケーラー等径部分多様体

V を無限次元実ベクトル位相空間とし、$<\,,\,>$ を V の非退化対称双線形形式で連続なものとし、J を $J^2=-\mathrm{id}$ となる V の連続線形作用素とする。V の直交時空分解 $V=V_-\oplus V_+$ で、$(V,\langle\,,\,\rangle_{V_\pm})$ がヒルベルト空間となり、かつ、$JV_\pm=V_\mp$ となるようなものが存在するとき、$(V,\langle\,,\,\rangle,J)$ を無限次元アンチケーラー空間と呼ぶ。ここで、$\langle\,,\,\rangle_{V_\pm}$ は $-\pi_{V_-}^*\langle\,,\,\rangle+\pi_{V_+}^*\langle\,,\,\rangle$ ($\pi_{V_\pm}:V_\pm$ への直交射影) を表す。次に、アンチケーラーヒルベルト多様体の定義を述べることにする。M をヒルベルト空間 $(V,\langle\,,\,\rangle_V)$ をモデル空間とするヒルベルト多様体とし、M の $(0,2)$ 次テンソルバンドル $T^*M\otimes T^*M$ の (C^∞) 切断で M の各点 x に対し $\langle\,,\,\rangle_x$ が非退化対称双線形形式で連続になっているようなものとし、J を M の $(1,1)$ 次テンソルバンドル $T^*M\otimes TM$ の (C^∞) 切断で M の各点 x に対し J_x が $J_x^2=-\mathrm{id}$ を満たす連続線形作用素になっているようなものとする。もし M の各点 x で x のある近傍 U 上の2つの (C^∞) 接分布 W_+,W_- で次の条件を満たすものが存在するとき、$(M,\langle\,,\,\rangle,J)$ をアンチケーラーヒルベルト多様体と呼ぶ。

(AH) U 内の各点 y に対し、$W_{\pm y}$ が $(T_yM,\langle\,,\,\rangle_y)$ の直交時空分解を与え、$(T_yM,\langle\,,\,\rangle_{y,W_{\pm y}})$ が $(V,\langle\,,\,\rangle_V)$ に等長的で、$J_yW_{\pm y}=W_{\mp y}$ が成り立つ。

無限次元アンチケーラー空間は、アンチケーラーヒルベルト多様体とみなされる。f をヒルベルト多様体 M から無限次元アンチケーラー空間 $(V,\langle\,,\,\rangle_V,J)$ への (C^∞) はめ込みで $J(f_*T_xM)\subset f_*T_xM$ $(x\in M)$ を満たすものとする。$(M,\langle\,,\,\rangle,\bar J)$ ($\langle\,,\,\rangle:=f^*\langle\,,\,\rangle_V$, $\bar J\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} f_*\circ\bar J=J\circ f_*$) がアンチケーラーヒルベルト多様体になり、$\mathrm{codim}\,M<\infty$ で次の条件が成り立つとき、$(M,\langle\,,\,\rangle,\bar J)$ を $(V,\langle\,,\,\rangle_V,J)$ 内のアンチケーラーフレッドホルム部分多様体とよぶ。

(AF) 直交時空分解 $V=V_-\oplus V_+$ で、$(V,\langle\,,\,\rangle_{V_\pm})$ がヒルベルト空間になり、かつ、$JV_\pm=V_\mp$ となるようなもので、さらに M の各法ベクトル v に対し形作用素 A_v が $f^*\langle\,,\,\rangle_{V_\pm}$ に関してコンパクト作用素になるようなものが存在する。

$(M,\langle\,,\,\rangle,J)$ をアンチケーラー空間 $(V,\langle\,,\,\rangle_V,J)$ 内のアンチケーラーフレッドホルム部分多様体とする。v を $(M,\langle\,,\,\rangle,J)$ の単位法ベクトルとし、A_v を v 方向の形作用素とする。$A_vX=aX+bJX$ $(a,b\in\mathbf{R})$ となる $X(\neq 0)$ が存在するとき、$a+b\sqrt{-1}$ を A_v の J 固有値または v 方向の複素主曲率とよび、X を $a+b\sqrt{-1}$ に対する J 固有ベクトルとよぶ。各 J 固有値に対する J 固有ベクトルの全体は、J 不変な部分空間となる。この部分空間をその J 固有値に対する J 固有空間とよぶ。任意の2つの J 固有空間は互いに直交することが示され、また、A_v の0以外の J 固有値の全体は

$$\{\lambda_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$$

$$\left(\begin{array}{c}|\lambda_i|>|\lambda_{i+1}|\ \text{ or }\ "|\lambda_i|=|\lambda_{i+1}|\ \&\ \mathrm{Re}\lambda_i>\mathrm{Re}\lambda_{i+1}"\\ \text{or }\ "|\lambda_i|=|\lambda_{i+1}|\ \&\ \mathrm{Re}\lambda_i=\mathrm{Re}\lambda_{i+1}\ \&\ \mathrm{Im}\lambda_i=-\mathrm{Im}\lambda_{i+1}>0"\end{array}\right)$$

という形で与えられることが示される。上述の λ_i を v 方向の第 i 複素主曲率とよぶ。次の条件が成り立つとき、$(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ をアンチケーラー等径部分多様体とよぶ。

(AI) 法ホロノミー群が自明であり、各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ 方向の複素主曲率の個数が $x \in M$ によらず一定であり、$\tilde{v}$ 方向の各複素主曲率関数が M 上で一定であり、かつ、一定の重複度をもつ。

さらに、次の条件が成り立つとき、プロパーアンチケーラー等径部分多様体とよぶ。

(PAI) M の各単位法ベクトル v に対し、A_v の J 固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する。

M の 1 点 x_0 を固定する。$(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ がプロパーアンチケーラー等径部分多様体であるとき、A_v $(v \in T^\perp_x M)$ らの同時 J 固有空間分解 $T_{x_0}M = \overline{\underset{i\in I}{\oplus} E_i^{x_0}}$ が存在し、$A_v|_{E_i^{x_0}} = \mathrm{Re}(\lambda_i^{x_0}(v))\mathrm{id} + \mathrm{Im}(\lambda_i^{x_0}(v))J$ $(v \in T^\perp_{x_0}M)$ によって $T^\perp_{x_0}M$ 上の複素線形関数 $\lambda_i^{x_0}$ $(i \in I)$ が定義される。ここに、$T^\perp_{x_0}M$ は、J により複素線形空間とみなし、id は $E_i^{x_0}$ の恒等変換を表す。λ_i を $\lambda_i(x_0) = \lambda_i^{x_0}$ を満たす $T^\perp M^* \otimes \mathbf{C}$ の平行切断とする。このとき、M の各点 x に対し、T_xM の分解 $T_xM = \overline{\underset{i\in I}{\oplus} E_i^x}$ で、$A_v|_{E_i^x} = \mathrm{Re}((\lambda_i(x))(v))\mathrm{id} + \mathrm{Im}((\lambda_i(x))(v))J$ $(v \in T^\perp_x M)$ となるものが存在する。λ_i $(i \in I)$ らは $(M, \langle\ ,\ \rangle, J)$ の複素主曲率と呼ばれ、$E_i(x) = E_i^x$ $(x \in M)$ によって定義される M 上の接分布 E_i は λ_i に対する複素主曲率分布と呼ばれる。また、M の平行法ベクトル場 v_i $(i \in I)$ を $\lambda_i(\cdot) = \langle v_i, \cdot\rangle - \sqrt{-1}\langle Jv_i, \cdot\rangle$ によって定義する。v_i $(i \in I)$ らを M の複素主曲率法ベクトル場と呼ぶ。

5. Parallel transport 写像

G を忠実な実表現をもつ連結半単純リー群とし、$\mathfrak{g}$ を G のリー代数とする。$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な非退化対称双線形形式 B から $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$ の対称複素双線形形式 $B^{\mathbf{c}}$ が決まり、さらにその実部 $\mathrm{Re}\,B^{\mathbf{c}}$ から $G^{\mathbf{c}}$ 上の両側不変な擬リーマン計量が決まる。自明な $G^{\mathbf{c}}$-バンドル $[0,1] \times G^{\mathbf{c}}$ の ($\mathrm{Re}\,B^{\mathbf{c}}$ から定義される $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$ のある内積に関して L^2 積分可能な) 接続の空間 $H^0([0,1], \mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$(これは無限次元アンチケーラー空間になる) から $G^{\mathbf{c}}$ への写像 $\phi^{\mathbf{c}}$ を次のように定義する。

$$\phi^{\mathbf{c}}(u) := g_u(1) \qquad (u \in H^0([0,1], \mathfrak{g}^{\mathbf{c}}))$$

$$\left(\begin{array}{c} g_u : g_u(0) = e \text{ および } g_{u*}^{-1} g_u' = u \text{ を満たす} \\ H^1([0,1], G^{\mathbf{c}}) \text{ の要素} \end{array}\right)$$

ここで、e は $G^{\mathbf{c}}$ の単位元、g_u' は g_u の弱微分，$g_{u*}^{-1} g_u'$ は $(g_{u*}^{-1} g_u')(t) = L_{g_u(t)_*}^{-1}(g_u'(t))$ $(t \in [0,1])$ によって定義される $H^0([0,1], \mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$ の要素を表す。$\phi^{\mathbf{c}}$ を $G^{\mathbf{c}}$ に対する parallel transport 写像とよぶ。

命題 5.1([K2]). ϕ^c はアンチケーラーサブマージョンになる。

$H^1([0,1],G^c)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g}^c)$ に次のように作用する。

$$g * u := \mathrm{Ad}(g)u - g' g_*^{-1} \quad (g \in H^1([0,1],G^c),\ u \in H^0([0,1],\mathfrak{g}^c))$$

この作用はいわゆるゲージ変換の接続への作用である。$\Omega_e(G^c) := \{g \in H^1([0,1],G^c) \mid g(0) = g(1) = e\}$, $P(G^c, e \times G^c) := \{g \in H^1([0,1],G^c) \mid g(0) = e\}$ とおく。このとき、次の事実が成り立つ。

命題 5.2([K2]). (i) $H^1([0,1],G^c)$ の $H^0([0,1],\mathfrak{g}^c)$ への上述の作用は等長的である。
(ii) 上述の作用の下、$P(G^c, e \times G^c)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g}^c)$ に推移的かつ自由に作用する。
(iii) $\phi^c(g * u) = g(0)\phi^c(u)g(1)^{-1}$ $(g \in H^1([0,1],G^c),\ u \in H^0([0,1],\mathfrak{g}^c))$ が成り立つ。
(iv) 上述の作用の下、$\phi^c : H^0([0,1],\mathfrak{g}^c) \to G^c$ は $\Omega_e(G^c)$ バンドルとみなされる。

ϕ^c に類似して、自明な G バンドル $[0,1] \times G$ の (B から定義される $\mathfrak{g}$ のある内積に関して L^2 積分可能な) 接続の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$(これは擬ヒルベルト空間になる) から G への擬リーマンサブマージョン ϕ が定義される。これは、G に対する parallel transport 写像 とよばれ、上述の命題に類似した事実が成り立つ ([K1] 参照)。

6. プロパー複素等焦部分多様体

M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の複素等焦部分多様体, $\phi : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ を G に対する parallel transport 写像, $\pi : G \to G/K$ を自然な射影とする。$(\pi \circ \phi)^{-1}(M)$ の各単位法ベクトル v に対し、v 方向の形作用素 A_v の複素化 $A_v^c\,(: T_xM^c \to T_xM^c)$ ($x : v$ の基点) の固有ベクトルからなる $(T_xM)^c$ の擬正規直交基底が存在するとき、M を プロパー複素等焦部分多様体 とよぶ (擬正規直交基底の定義については [K1] を参照のこと)。この部分多様体に関して次の事実が成り立つ。

命題 6.1. M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の複素等焦部分多様体とする。
(i) M が curvature adapted で、かつ、その各法ベクトル v に対し、v 方向の形作用素 A_v が $\mathrm{Ker}(A_v|_{g_*\mathfrak{p}_\alpha} \pm \alpha(g_*^{-1}v)\mathrm{id}) = \{0\}$ $(\alpha \in \triangle)$ を満たすとする。ここで、g は v の基点の代表元 (つまり、$v \in T_{gK}M$), $\triangle$ は $g_*^{-1}T_{gK}^{\perp}M$ を含む $\mathfrak{p} := T_{eK}(G/K)$ のある極大アーベル空間 $\mathfrak{a}$ に関するルート系, $\mathfrak{p}_\alpha$ はルート α に対するルート空間を表す。このとき、M はプロパー複素等焦部分多様体になる。
(ii) M が完備かつ実解析的であるとき、M がプロパー複素等焦部分多様体であることと $(\pi^c \circ \phi^c)^{-1}(M^c)$ の各連結成分がプロパーアンチケーラー等径部分多様体になることは同値である。

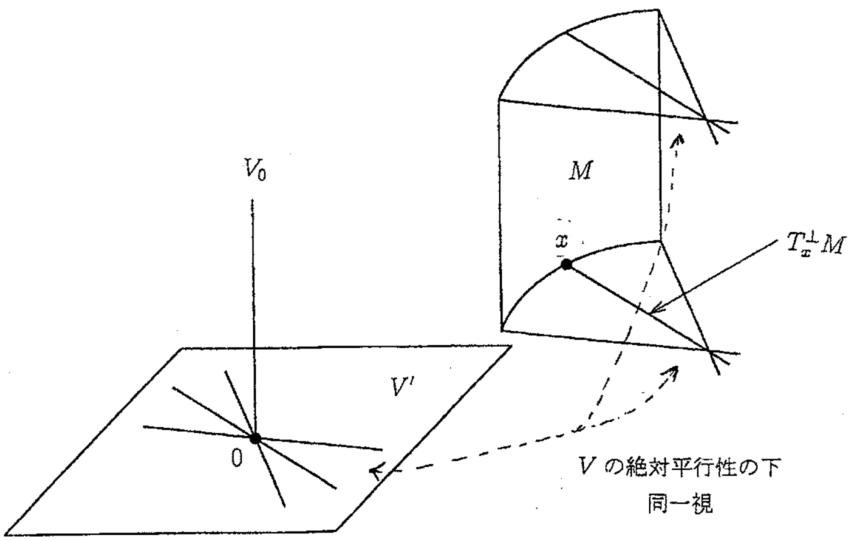
III. 定理 2,3,6 の証明の概略

この節において、定理 2,3 および 6 の証明の概略を述べることにする。

定理 2 の証明の概略 M を無限次元アンチケーラー空間 V 内のプロパーアンチケーラー等径部分多様体とし、W を M の点 x_0 における複素 Coxeter 群とする。まず、M が 2 つのプロパーアンチケーラー等径部分多様体 $M_i \hookrightarrow V_i$ $(i = 1, 2)$ らの外在的直積 $M_1 \times M_2 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 = V$ に合同であるとする。このとき、M と $M_1 \times M_2$ の同一視の下、$T^{\perp}_{x_0}M = T^{\perp}_{x_0}M_1 \oplus T^{\perp}_{x_0}M_2$(直交和) となる。容易に M の x_0 における各複素主曲率法ベクトルは $T^{\perp}_{x_0}M_1$ と $T^{\perp}_{x_0}M_2$ のいずれかに含まれることが示される。それゆえ、次の複素 Coxeter 群に関する事実 $(*)$ により、W が分解可能であることが示される。

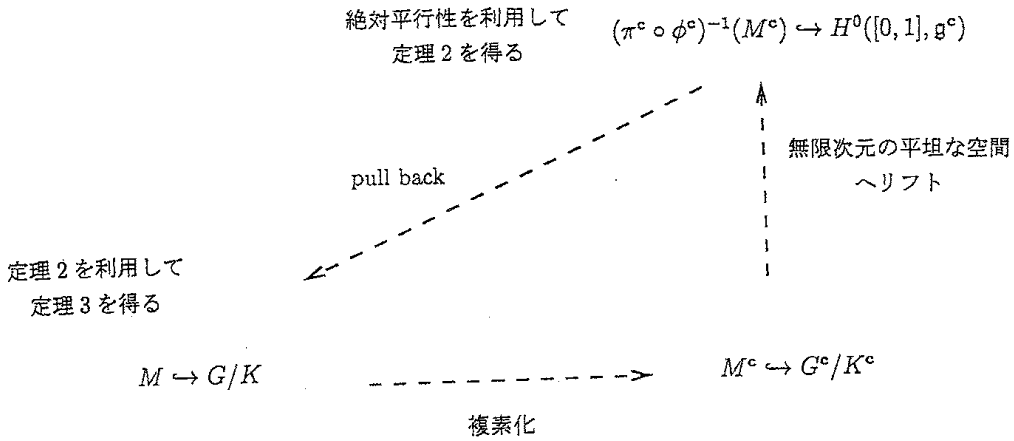
$(*)$ $T^{\perp}_{x_0}M$ の互いに直交するアンチケーラー部分空間 P_1 と P_2 で、$P_1 \oplus P_2 = T^{\perp}_{x_0}M$ を満たし、かつ、x_0 における各複素主曲率法ベクトルが P_1, P_2 のいずれかに含まれるようなものが存在するならば、W は分解可能である。また、その逆も成り立つ。

逆に、W が分解可能であるとする。このとき、上述の事実 $(*)$ により、$(*)$ の主張にけるような $T^{\perp}_{x_0}M$ のアンチケーラー部分空間 $P_1^{x_0}, P_2^{x_0}$ が存在する。M の各点 x でも、同様な $T^{\perp}_xM$ のアンチケーラー部分空間 P_1^x, P_2^x が存在する。しかも、$P_i := \bigcup_{x\in M} P_i^x$ $(i = 1, 2)$ が $T^{\perp}M$ の法接続に関して平行な部分バンドルになるようにとることができることが示される。$V' := \mathrm{Span} \bigcup_{x\in M} T^{\perp}_xM$, $V_0 := (V')^{\perp}$, $V_i := \mathrm{Span} \bigcup_{x\in M} P_i^x$ $(i = 1, 2)$ とする。ここで、V の絶対平行性の下に V の各点における接空間を V と同一視することより、T_xM, P_i^x を V の部分空間とみなしていることを注意しておく (下図参照)。このとき、$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$(直交和) が示され、さらに $M_i := M \cap V_i$ $(i = 1, 2)$ として $M_i \hookrightarrow V_i$ $(i = 1, 2)$ がプロパーアンチケーラー等径部分多様体であること、および、$M \equiv V_0 \times M_1 \times M_2$ が示される。 q.e.d.



次に、定理2を用いた定理3の証明の概略を述べることにする。

<u>定理3の証明の概略</u> M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の完備かつ実解析的なプロパー複素等焦部分多様体とし、W を M の点 x_0 における複素 Coxeter 群とする。まず、M が2つのプロパー複素等焦部分多様体 $M_i \hookrightarrow G_i/K_i$ $(i=1,2)$ らの外在的直積 $M_1 \times M_2 \hookrightarrow G_1/K_1 \times G_2/K_2 = G/K$ に合同であるとする。$\phi^{\mathbf{c}} : H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}) \to G^{\mathbf{c}}$, $\phi_i^{\mathbf{c}} : H^0([0,1],\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}}) \to G_i^{\mathbf{c}} (i=1,2)$ を各々 $G^{\mathbf{c}}$, $G_i^{\mathbf{c}}$ に対する parallel transport 写像とし、$\pi : G \to G/K$, $\pi_i : G_i \to G_i/K_i (i=1,2)$ を各々自然な射影とする。このとき、$(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}}) \equiv (\pi_1^{\mathbf{c}} \circ \phi_1^{\mathbf{c}})^{-1}(M_1^{\mathbf{c}}) \times (\pi_2^{\mathbf{c}} \circ \phi_2^{\mathbf{c}})^{-1}(M_2^{\mathbf{c}})$ が示され、それゆえ、定理2により $(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ の複素 Coxeter 群 ($\cong W$) は分解可能であることがわかる。逆に、W が分解可能であるとする。W は $(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ の複素 Coxeter 群でもあるので、定理2の証明によれば、$(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ はある2つのプロパーアンチケーラー等径部分多様体 $\widetilde{M_1} \hookrightarrow V_1$ と $\widetilde{M_2} \hookrightarrow V_2$ の外在的直積上のシリンダー $\widetilde{M_1} \times \widetilde{M_2} \times V_0 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 \oplus V_0 (= H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}))$ に合同である。分解 $H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_0$ に対し、$\mathfrak{g}$ の分解 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_0$ で $V_i \subset H^0([0,1],\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}})$ $(i=1,2)$, $H^0([0,1],\mathfrak{g}_0^{\mathbf{c}}) \subset V_0$, $\theta(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$ $(i=0,1,2)$ (θ : (G,K) の Cartan 対合) となるものをみつけることができる。$\widetilde{M_i'} := (\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}}) \cap H^0([0,1],\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}})$ $(i=1,2)$ とし、$M_i' := (\pi_i^{\mathbf{c}} \circ \phi_i^{\mathbf{c}})(\widetilde{M_i'}) \cap G_i/K_i$ $(i=1,2)$ とする。ここで、$\phi_i^{\mathbf{c}}$ は $G_i^{\mathbf{c}} (:= \exp \mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}})$ に対する parallel transport 写像, $\pi_i^{\mathbf{c}}$ は $G_i^{\mathbf{c}}$ から $G_i^{\mathbf{c}}/K_i^{\mathbf{c}}$ $(K_i^{\mathbf{c}} := \exp \mathrm{Fix}(\theta^{\mathbf{c}}|_{\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}}}))$ への自然な射影を表し、また、$G_i := \exp \mathfrak{g}_i$, $K_i := \exp(\mathrm{Fix}(\theta|_{\mathfrak{g}_i}))$ とする。このとき、$M_i' \hookrightarrow G_i/K_i (i=1,2)$ がプロパー複素等焦部分多様体であることと、$M \hookrightarrow G/K$ が $M_1' \times M_2' \times G_0/K_0 \hookrightarrow G_1/K_1 \times G_2/K_2 \times G_0/K_0$ に合同であることが示される $(G_0 := \exp \mathfrak{g}_0, K_0 := \exp(\mathrm{Fix}(\theta|_{\mathfrak{g}_0})))$。 q.e.d.



次に、定理6の証明の概略を述べることにする。

<u>定理6の証明の概略</u> M, G/K, r_0, v, $\triangle_+$ を定理6の主張におけるようなものとする。M の外在的複素化 $M^{\mathbf{c}}$ の v から生ずる平行な単位ベクトル場を $\widetilde{v}$ とする。r_0 に対するフォーカル写像 $f_{r_0} : M^{\mathbf{c}} \to G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ が $f_{r_0}(x) := \exp^{\perp}(r_0 \widetilde{v}_x)$ $(x \in M^{\mathbf{c}})$ によっ

て定義される。ここで、$r_0\widetilde{v}_x$ は $(\mathrm{Re}\, r_0)\widetilde{v}_x+(\mathrm{Im}\, r_0)J\widetilde{v}_x$ (J : G^c/K^c の複素構造) を意味する。$F:=f_{r_0}(M^c)$ とし、A^F をその形テンソル, ψ_t を G^c/K^c の測地流とする。また、$o:=eK^c(\in M^c)$ とする。ここで、e は G^c の単位元を表す。このとき、形作用素 $A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}$ の J トレースとよばれ量 $\mathrm{Tr}_J A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}$ が次のように記述されることが示される：

$$\mathrm{Tr}_J A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}=\frac{r_0}{|r_0|}\sum_{(\lambda,\alpha)\in S_{r_0}}\frac{\alpha(v)^2-\frac{\lambda\alpha(v)}{\tanh(r_0\alpha(v))}}{\lambda-\frac{\alpha(v)}{\tanh(r_0\alpha(v))}}\times m_{\lambda,\alpha}$$

ここで、S_{r_0}, $m_{\lambda,\alpha}$ は定理6の主張におけるようなものである。それゆえ、$\mathrm{Tr}_J A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}=0$ を示せばよい。M が等質である場合は、[HsLa] の Corollary 1.1 の証明を模倣することによりこの関係式を示すことができる。M が階数1の場合、$\Phi(w):=\mathrm{Tr}_J A^F_w$ ($w\in T^{\perp}_{f_{r_0}(o)}F$) によって定義される複素線形関数 $\Phi:T^{\perp}_{f_{r_0}(o)}F\to\mathbf{C}$ を考える。M が階数1であることを用いて Φ が $T^{\perp}_{f_{r_0}(o)}F$ 内の複素 (超) 球面上で一定であることが示され、それゆえ、Φ の複素線形性から $\Phi\equiv 0$ を得る。特に、$\mathrm{Tr}_J A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}=0$ が得られる。次に、主張における (iii) の場合を考える。$\widetilde{v}$ の $(\pi^c\circ\phi^c)^{-1}(M^c)$ への水平リフトを $\widetilde{v}^L$ として、$\widetilde{f}_{r_0}(u):=u+r_0\widetilde{v}^L_u$ ($u\in(\pi^c\circ\phi^c)^{-1}(M^c)$) によって定義されるフォーカル写像 $\widetilde{f}_{r_0}:(\pi^c\circ\phi^c)^{-1}(M^c)\to H^0([0,1],\mathfrak{g}^c)$ を考える。$\widetilde{F}:=\widetilde{f}_{r_0}((\pi^c\circ\phi^c)^{-1}(M^c))$ とし、その形テンソルを $A^{\widetilde{F}}$ とする。このとき、形作用素 $A^{\widetilde{F}}_{\widetilde{\psi}_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}^L_{\hat{0}})}$ ($\hat{0}$: $H^0([0,1],\mathfrak{g}^c)$ の零ベクトル, $\widetilde{\psi}_t$: $H^0([0,1],\mathfrak{g}^c)$ の測地流) の J トレースとよばれる量 $\mathrm{Tr}_J A^{\widetilde{F}}_{\widetilde{\psi}_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}^L_{\hat{0}})}$ がある無限級数として定義され、その量が $\mathrm{Tr}_J A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}$ に等しいことが示される。一方、$\mathrm{Tr}_J A^{\widetilde{F}}_{\widetilde{\psi}_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}^L_{\hat{0}})}$ が0であることが示され、よって $\mathrm{Tr}_J A^F_{\psi_{|r_0|}(\frac{r_0}{|r_0|}\widetilde{v}_o)}=0$ を得る。

q.e.d.

主な参考文献

[BV] J. Berndt and L. Vanhecke, Curvature adapted submanifolds, Nihonkai Math. J. **3** (1992) 177-185.

[B] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, Math. Z. **229** (1998) 589-600.

[BB] J. Berndt and M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, J. Reine Angew. Math. **541** (2001) 209-235.

[BT1] J. Berndt and H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric space, J. Differential Geometry **63** (2003) 1-40.

[BT2] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, Tohoku Math. J. **56** (2004) 163-177.

[Ca] E. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces á courbure constante, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938) 177-191.

[Ch] U. Christ, Homogeneity of equifocal submanifolds, J. Differential Geometry **62** (2002) 1-15.

[Co] H.S.M. Coxeter, Discrete groups generated by reflections, Ann. of Math. **35** (1934) 588-621.

[E1] H. Ewert, A splitting theorem for equifocal submanifolds in simply connected compact symmetric spaces, Proc. of Amer. Math. Soc. **126** (1998) 2443-2452.

[E2] H. Ewert, Equifocal submanifolds in Riemannian symmetric spaces, Doctoral thesis.

[G] L. Geatti, Invariant domains in the complexfication of a noncompact Riemannian symmetric space, J. of Algebra **251** (2002) 619-685.

[Ha1] J. Hahn, Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space form, Math. Z. **187** (1984) 195-208.

[Ha2] J. Hahn, Isotropy representations of semi-simple symmetric spaces and homogeneous hypersurfaces, J. Math. Soc. Japan **40** (1988) 271-288.

[HL1] E. Heintze and X. Liu, A splitting theorem for isoparametric submanifolds in Hilbert space, J. Differential Geometry **45** (1997) 319-335.

[HL2] E. Heintze and X. Liu, Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds, Ann. of Math. **149** (1999) 149-181.

[HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley type restriction theorem, arXiv:math.DG/0004028 v2.

[HPTT1] E. Heintze, R.S. Palais, C.L. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions and k-flat homogeneous spaces, J. Reine Angew. Math. **454** (1994) 163-179.

[HPTT2] E. Heintze, R.S. Palais, C.L. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, Geometry, topology and physics for Raoul Bott (ed. S. T. Yau), Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology **4**, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995 pp214-245.

[He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[Hu] M.C. Hughes, Complex reflection groups, Communications in Algebra **18** (1990) 3999-4029.

[HsLa] W.Y. Hsiang and H.B. Lawson, JR., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, J. Differential Geometry **5** (1971) 1-38.

[Ka] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1966.

[KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry Vol II, Interscience, New York, 1963.

[K1] N. Koike, Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space, Kyushu J. Math. **58** (2004) 167-202.

[K2] N. Koike, Complex equifocal submanifolds and infinite dimensional anti-Kaehlerian isoparametric submanifolds, Tokyo J. Math. **28** (2005) 201-247.

[K3] N. Koike, Actions of Hermann type and proper complex equifocal submanifolds, Osaka J. Math. **42** (2005) 599-611.

[K4] N. Koike, A splitting theorem for proper complex equifocal submanifolds, submitted for publication.

[K5] N. Koike, An identity of Cartan type for complex equifocal hypersurfaces, submitted for publication.

[K6] N. Koike, On the complex Coxeter groups associated with proper complex equifocal submanifolds, in preparation.

[K7] N. Koike, Extrinsic complexifications and dual submanifolds of submanifolds in symmetric spaces, in preparation.

[Kol] A. Kollross, A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2001) 571-612.

[KT] C. King and C.L. Terng, Minimal submanifolds in path space, Global Analysis in Modern Mathematics (ed. K. Uhlenbeck), Publish or Perish 1993 pp253-281.

[L] S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, New York, 1966.

[MRT] Y. Maeda, S. Rosenberg and P. Tondeur, The mean curvature of gauge orbits, Global Analysis in Modern Mathematics (ed. K. Uhlenbeck), Publish or Perish 1993 pp171-217.

[M1] M.A. Magid, Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms, Tsukuba J. Math. **8** (1984) 31-54.

[M2] M.A. Magid, Lorentzian isoparametric hypersurfaces, Pacific J. Math. **118** (1985) 165-197.

[O1] B. O'Neill, The fundamental equations of submersions, Michigan Math. J. **13** (1966) 459-469.

[O2] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.

[OS] T. Ohshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semi-simple symmetric pair, Advanced Studies in Pure Mathematics **4** (1984) 433-497.

[P] R.S. Palais, Morse theory on Hilbert manifolds, Topology **2** (1963) 299-340.

[PaTe1] R.S. Palais and C.L. Terng, A general theory of canonical forms, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987) 771-789.

[PaTe2] R.S. Palais and C.L. Terng, Critical point theory and submanifold geometry, Lecture Notes in Math. **1353**, Springer, Berlin, 1988.

[Pe] A.Z. Petrov, Einstein spaces, Pergamon Press, Hungary, 1969.

[PiTh] U. Pinkall and G. Thorbergsson, Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds, Math. Z. **205** (1990) 279-286.

[Sm1] S. Smale, *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem*, Ann. of Math. 80 (1964) 382-396.

[Sm2] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. 87 (1965) 861-866.

[St] M.B. Stenzel, Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space, manuscripta math. **80** (1993), 151-163.

[Sz1] R. Szöke, Complex structures on tangent bundles of Riemannian manifolds, Math. Ann. **291** (1991) 409-428.

[Sz2] R. Szöke, Automorphisms of certain Stein manifolds, Math. Z. **219** (1995) 357-385.

[Sz3] R. Szöke, Adapted complex structures and geometric quantization, Nagoya Math. J. **154** (1999) 171-183.

[Sz4] R. Szöke, Involutive structures on the tangent bundle of symmetric spaces, Math. Ann. **319** (2001) 319-348.

[Te1] C.L. Terng, Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups, J. Differential Geometry **21** (1985) 79-107.

[Te2] C.L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geometry **29** (1989) 9-47.

[Te3] C.L. Terng, Polar actions on Hilbert space, J. Geom. Anal. **5** (1995) 129-150.

[Th] G. Thorbergsson, Isoparametric foliations and their buildings, Ann. of Math. **133** (1991) 429-446.

[TeTh1] C.L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces,

J. Differential Geometry **42** (1995) 665-718.

[TeTh2] C.L. Terng and G. Thorbergsson, Taut immersions into complete Riemannian manifolds, Tight and Taut submanifolds (ed. T.E. Cecil and S.S. Chern), Mathematical Sciences Research Institute Publications **32**, Cambridge University Press, 1997 pp181-228.

[W] B. Wu, Isoparametric submanifolds of hyperbolic spaces Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992) 609-626.